

2 RS 46115

THREE YEAR B.A./B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL/MAY 2024
FOURTH SEMESTER

Mathematics

Paper V – LINEAR ALGEBRA

(w.e.f. 2020-21 Admitted Batch)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

(No additional sheet will be supplied)

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 5 marks.

ఏదేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. If S, T are the subsets of a vector space $V(F)$, then prove that $S \subseteq T \Rightarrow L(S) \subseteq L(T)$.
 $V(F)$ సదిశాంతరాళంలో S, T ఉపసమితులు అయితే $S \subseteq T \Rightarrow L(S) \subseteq L(T)$ అని చూపండి.
2. Show that the system of vectors $(1, 3, 2), (1 - 7, -8), (2, 1, -1), (1, 0, 1)$ of $V_3(R)$ is linearly dependent.
 $V_3(R)$ సదిశాంతరాళంలో $(1, 3, 2), (1 - 7, -8), (2, 1, -1), (1, 0, 1)$ సదిశలు ఋజుపరాధీనములు అని చూపండి.
3. Show that the set $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ is a basis of $C^3(C)$. Hence find the coordinates of the vector $(3 + 4i, 6i, 3 + 7i)$ in $C^3(C)$.
 $C^3(C)$ నకు $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ ఆధారసమితి అని చూపండి. $(3 + 4i, 6i, 3 + 7i)$ సదిశలు నిరూపకాలు కనుక్కోండి.
4. Show that the vectors $(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)$ form a basis for R^3 .
 $(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)$ అను సదిశలు R^3 యొక్క ఆధారాన్ని ఏర్పరుస్తుంది అని చూపుము.
5. The mapping $T : V_3(R) \rightarrow V_3(R)$ is defined by $T(x, y, z) = (x - y, 0, y + z)$. Show that T is a linear transformation.
 $T(x, y, z) = (x - y, 0, y + z)$ అగునట్లు $T : V_3(R) \rightarrow V_3(R)$ ను నిర్వచించిన, T ఒక ఋజుపరివర్తన అని చూపుము.

6. Let $T: R^3 \rightarrow R^3$ and $H: R^3 \rightarrow R^3$ are two linear transformation defined by $T(x, y, z) = (3x, y+z)$ and $H(x, y, z) = (2x - z, y)$.

Compute the following.

- (a) $T + H$
- (b) $4T - 5H$
- (c) TH
- (d) HT

$T: R^3 \rightarrow R^3$ మరియు $H: R^3 \rightarrow R^3$ లు రెండు సరళపరివర్తనలు $T(x, y, z) = (3x, y+z)$ మరియు $H(x, y, z) = (2x - z, y)$ గా నిర్వచిస్తే,

- (a) $T + H$
- (b) $4T - 5H$
- (c) TH
- (d) HT లను కనుక్కోండి.

7. Find the rank of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix} \text{ యొక్క కోటిని కనుగొనండి.}$$

8. Reduce the matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ into echelon form and find its rank.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ మాత్రిక యొక్క echelon రూపం మరియు దాని ర్యాంక్ కనుగొనండి.}$$

9. Show that the system of equations $2x + 3y = 1$, $x + y = 0$, $6x + 5y = 1$ are inconsistent.

$2x + 3y = 1$, $x + y = 0$, $6x + 5y = 1$ సమీకరణాలు పొందిన నియమము పాటించడని చూపండి.

10. Find the Eigen values of the matrix $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ మాత్రిక యొక్క లాక్షణిక మూలాలను కనుగొనుము.}$$

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. Prove that Union of two subspaces is a subspace if and only if one is contained in the other.
రెండు ఉపాంతరాళాల సమ్మేళనం కూడా ఉపాంతరాళం కావడానికి అవశ్యక, పర్యాప్త నియమం ఒకటి రెండవదాని ఉపసమితి అయి ఉండాలి అని నిరూపించండి.

Or

12. If S and T are two subsets of a vector space $V(F)$ then show that $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.
 $V(F)$ సదిశాంతరాళంలో S, T ఉపసమితులు అయితే $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ అని చూపండి.

13. V is the vector space of a polynomial over R . W_1 and W_2 are the subspaces generated by $\{x^3 + x^2 - 1, x^3 + 2x^2 + 3x, 2x^3 + 3x^2 + 3x - 1\}$ and

$\{x^3 + 2x^2 + 2x - 2, 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3, x^3 + 3x^2 + 4x - 3\}$ respectively then find

(a) $\dim(W_1 + W_2)$

(b) $\dim(W_1 \cap W_2)$

V, R పై బహుపదుల సదిశాంతరాళం, W_1 మరియు W_2 లు వరుసగా $\{x^3 + x^2 - 1, x^3 + 2x^2 + 3x, 2x^3 + 3x^2 + 3x - 1\}$ మరియు

$\{x^3 + 2x^2 + 2x - 2, 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3, x^3 + 3x^2 + 4x - 3\}$ లచే జనితమైన ఉపాంతరాళం అయితే

(a) $\dim(W_1 + W_2)$

(b) $\dim(W_1 \cap W_2)$

Or

14. If $V(F)$ is a finite dimensional vector space, then any two bases of V have the same number of elements.

$V(F)$ అనేది పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళం అయితే, V యొక్క ఏదైనా రెండు స్థావరాలు ఒకే మూలకాల యొక్క సంఖ్యను కలిగి ఉంటాయి.

15. State and prove Rank-Nullity theorem.

కోటి- శూన్యత సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

16. Find the nullspace, range, rank and nullity of the transformation $T:R^2 \rightarrow R^3$ defined by $T(x,y)=(x+y, x-y, y)$.

$T:R^2 \rightarrow R^3$ సదిశాంతరాళంను $T(x,y)=(x+y, x-y, y)$ గా నిర్వచిస్తే కోటి, శూన్యత, వ్యాప్తి శూన్యాంతరాలను కనుక్కోండి.

17. Find the rank of the following matrix by reducing it to normal form $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \text{ మాత్రిక యొక్క ర్యాంక్ ని సాధారణ రూపానికి తగ్గించడం ద్వారా కనుగొనండి.}$$

Or

18. Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ by using elementary transformations.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ప్రాథమిక పరివర్తనలను ఉపయోగించి మాత్రిక యొక్క విలోమాన్ని కనుక్కోండి.}$$

19. Solve that the system of equations $x+2y-z=3, 3x-y+2z=1, 2x-2y+3z=2, x-y+z=-1$ is consistent and solve them.

$x+2y-z=3, 3x-y+2z=1, 2x-2y+3z=2, x-y+z=-1$ ఉంటే పరిష్కారాన్ని కనుక్కోండి.

Or

20. Find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ by using Cayley-Hamilton theorem.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ కేలీ హామిల్టన్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి విలోమాన్ని కనుక్కోండి.}$$